

CORRECTION TD - E4

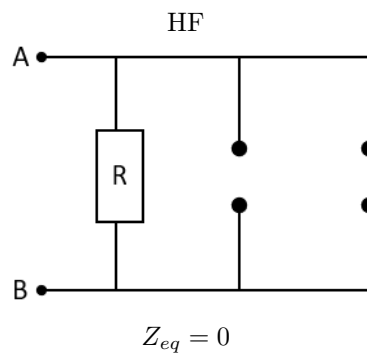
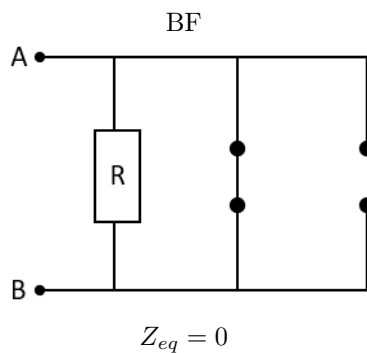
EXERCICES À MAÎTRISER

Ex. n°1 • Impédance équivalente



6355

1) En BF, la bobine est équivalente à un fil, qui court-circuite les deux autres dipôles. Donc $\underline{Z}_{eq}(\text{BF}) = 0$. En HF, le condensateur est équivalente à un fil, qui court-circuite les deux autres dipôles. Donc $\underline{Z}_{eq}(\text{HF}) = 0$.

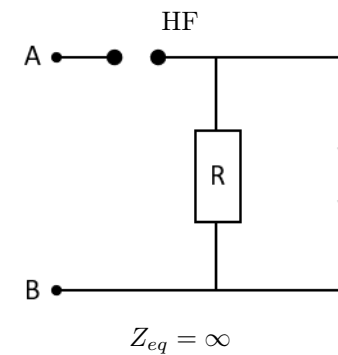
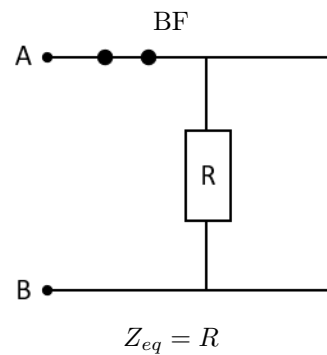


On a :

$$\underline{Z}_{eq} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right)^{-1}$$

On a bien $\underline{Z}_{eq} \rightarrow 0$ lorsque $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$.

2)

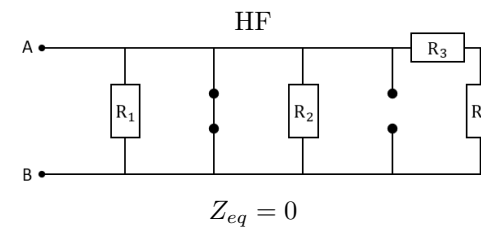
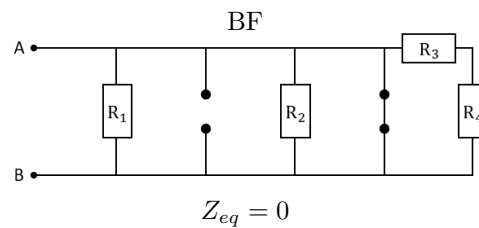


On a :

$$\underline{Z}_{eq} = j\omega L + \left(\frac{1}{R} + j\omega C \right)^{-1}$$

On a bien $\underline{Z}_{eq} \rightarrow R$ lorsque $\omega \rightarrow 0$ et $\underline{Z}_{eq} \rightarrow \infty$ lorsque $\omega \rightarrow \infty$.

3)



On a :

$$\underline{Z}_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right)^{-1}$$

On a bien $\underline{Z}_{eq} \rightarrow 0$ lorsque $\omega \rightarrow 0$ et lorsque $\omega \rightarrow \infty$.

Ex. n°2 • Existence d'une résonance



0189

On combine R et C en dérivation :

$$\underline{Z}_{eq} = \left(\frac{1}{R} + j\omega C \right)^{-1}$$

Avec un pont diviseur de tension :

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + 2R} \underline{e} = \frac{1}{1 + 2R \left(\frac{1}{R} + j\omega C \right)} \underline{e} = \frac{1}{3 + 2j\omega RC} \underline{e}$$

En module :

$$U_m = \frac{E_m}{\sqrt{g(\omega)}} \quad \text{avec : } g(\omega) = 9 + (2\omega RC)^2$$

Il existe une résonance en tension si U_m possède un maximum, donc si $g(\omega)$ possède un minimum. Or,

$$g'(\omega) = 8R^2 C^2 \omega$$

La dérivée g' ne s'annule qu'en $\omega = 0$ mais cela ne compte pas comme une résonance. En effet, $U_m(\omega)$ est une fonction strictement décroissante et ne possède donc pas de maximum local.

Ex. n°3 • Obtenir une ED grâce à la notation complexe



8366

1) Impédance équivalente de la résistance et de la bobine en dérivation :

$$\underline{Z}_{eq} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} \right)^{-1} = \frac{j\omega L}{1 + j\omega L/R}$$

Pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{r + \underline{Z}_{eq}} = \frac{j\omega L}{r + j\omega L \left(1 + \frac{r}{R} \right)}$$

Ainsi,

$$\left(r + j\omega L \left(1 + \frac{r}{R} \right) \right) \times \underline{s}(t) = j\omega L \times \underline{e}(t)$$

2) On repasse en réel :

$$\left(r + L \left(1 + \frac{r}{R} \right) \frac{d}{dt} \right) \times s(t) = L \frac{dE}{dt} = 0$$

Ainsi,

$$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = 0 \quad \text{avec : } \tau = \frac{L}{r} \left(1 + \frac{r}{R} \right)$$

Ex. n°4 • Circuit RC en RSF



2691

1) Une loi des mailles donne :

$$\underline{e}(t) = \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) \underline{i}(t) \Rightarrow E = \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) I_m \Rightarrow I_m = \frac{E}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

Faisons apparaître le paramètre τ :

$$\underline{I}_m = \frac{E}{R} \times \frac{j\tau\omega}{1 + j\tau\omega}$$

2) On en déduit l'amplitude :

$$I_m = |\underline{I}_m| = \frac{E}{R} \times \frac{\tau\omega}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

Et la phase :

$$\phi = \arg(\underline{I}_m) = \arg\left(\frac{E}{R}\right) + \arg(j\tau\omega) - \arg(1 + j\tau\omega) = \left[\frac{\pi}{2} - \arctan(\tau\omega) \right]$$

On a donc, par définition,

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

3) Avec $\omega\tau = 1$, on a :

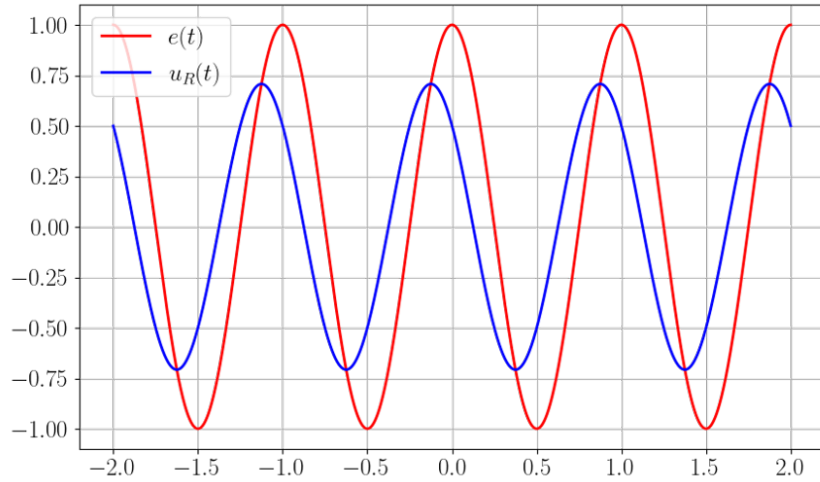
$$I_m = \frac{E}{R\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Ainsi,

$$u_R(t) = Ri = \frac{E}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

On rappelle que $\omega T = 2\pi$. Le maximum de $u_R(t)$ est atteint pour :

$$\omega t + \frac{\pi}{4} = 0 \Rightarrow \frac{2\pi t}{T} = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow t = -\frac{T}{8}$$



Ex. n°5 • Résonance en élongation

★★★☆☆

9238

1) On applique le PFD que l'on projette sur (Ox) :

$$m\ddot{x} = -h\dot{x} - k(\ell - \ell_0) \quad \text{avec : } \ell(t) - \ell_0 = x(t) - x_A(t) = x(t) - X_0 \cos(\omega t)$$

Ainsi,

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x(t) = \frac{k}{m} X_0 \cos(\omega t)$$

On en déduit :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{km}}{h}$$

2) On passe en notation complexe :

$$\left((j\omega)^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right) \underline{X_m} = \omega_0^2 X_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{X_m} = \frac{\omega_0^2 X_0}{-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}$$

On divise par ω_0^2 et on fait apparaître la pulsation réduite.

$$\underline{X_m} = \frac{X_0}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}} \quad \text{avec : } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Ainsi,

$$X_m(x) = |\underline{X_m}| = \frac{X_0}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

3) On a :

$$X_m(0) = X_0 \quad \text{et} \quad X_m(\infty) = 0$$

4) Déterminons le $\max(X_m)$. On remarque que :

$$X_m(x) = \frac{X_0}{\sqrt{g(x)}} \quad \text{avec : } g(x) = (1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2$$

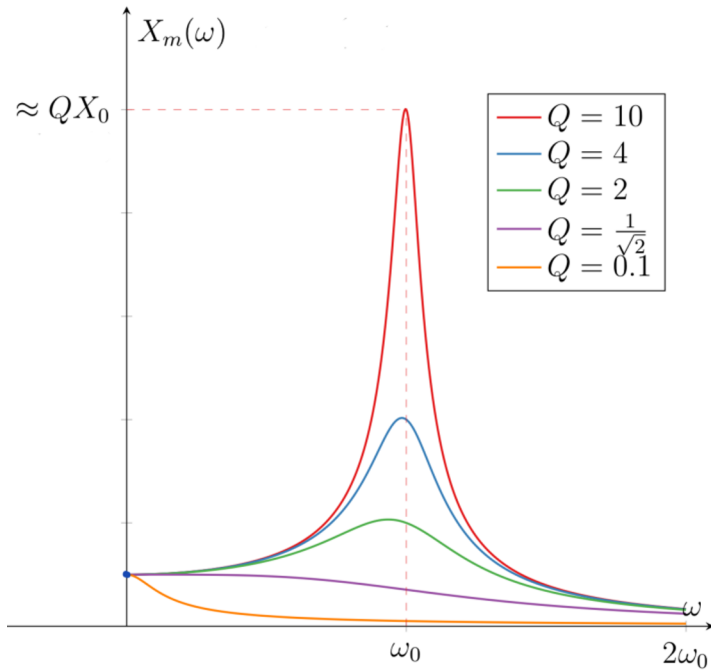
Alors, X_m est maximal si $g(x)$ est minimal. Cela se produit pour (on cherche $x > 0$) :

$$g'(x) = 0 = -4x(1 - x^2) + \frac{2x}{Q} = 4x \left(\frac{1}{2Q} - 1 + x^2 \right) \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Cette équation possède une solution si et seulement si :

$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

5)



POUR ALLER PLUS LOIN

Ex. n°6 • Circuit (RL) || (RC)



2706

1) On pose :

$$\underline{Z}_1 = R + j\omega L \quad \underline{Z}_2 = R + \frac{1}{j\omega C}$$

L'impédance équivalente vaut :

$$\underline{Z}_{eq} = \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \right)^{-1}$$

2) On utilise des ponts diviseur de courant puis on divise par $e^{j\omega}$.

$$\underline{i}_1(t) = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{i}(t) \Rightarrow \underline{I}_{m1} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}_m$$

$$\underline{i}_2(t) = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{i}(t) \Rightarrow \underline{I}_{m2} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I}_m$$

3) On a :

$$\begin{aligned} \underline{I}_{m1} = \underline{I}_{m2} &\Rightarrow |\underline{Z}_1| = |\underline{Z}_2| \\ &\Rightarrow R^2 + (\omega L)^2 = R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2} \\ &\Rightarrow \boxed{\omega^2 LC = 1} \end{aligned}$$

4) Les deux signaux sont en quadrature de phase lorsque le rapport $\underline{I}_{m2}/\underline{I}_{m1}$ est un imaginaire pur. En effet :

$$\underline{I}_{m1} = I_{m1} e^{j\phi_1} \quad \underline{I}_{m2} = I_{m2} e^{j\left(\phi_1 \pm \frac{\pi}{2}\right)} \Rightarrow \frac{\underline{I}_{m2}}{\underline{I}_{m1}} = \frac{I_{m2}}{I_{m1}} e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \pm j \frac{I_{m2}}{I_{m1}}$$

Or, on a :

$$\frac{\underline{I}_{m2}}{\underline{I}_{m1}} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{R + j\omega L}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{(R + j\omega L) \left(R - \frac{1}{j\omega C} \right)}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

Ce rapport est un imaginaire pur lorsque sa partie réelle est nulle. Ainsi,

$$R^2 - \frac{L}{C} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{R^2 C}{L} = 1}$$

Ex. n°7 • Le bleu du ciel



5396

1) On applique le PFD à un électron dans le référentiel de son noyau supposé galiléen.

$$m \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = -\alpha \frac{d \overrightarrow{OM}}{dt} - k \overrightarrow{OM} = -e \overrightarrow{E}_0 \cos(\omega t)$$

On met sous forme canonique :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d \overrightarrow{OM}}{dt} + \omega_0^2 \overrightarrow{OM} = -\omega_0^2 X_0 \cos(\omega t) \overrightarrow{u}_x$$

Avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$

2) En projetant le PFD sur chaque axe, il vient :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x(t) = -\omega_0^2 X_0 \cos(\omega t) \\ \ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{y} + \omega_0^2 y(t) = 0 \\ \ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z(t) = 0 \end{cases}$$

Sur y et z , on a une ED l'oscillateur amorti sans second membre. En régime permanent, on a donc $y=0$ et $z=0$. Le mouvement se fait donc selon l'axe (Ox) , c'est-à-dire colinéairement à $\vec{E}_0$.

3) On est en RSF. On note $\vec{E} = E_0 e^{i\omega t} \vec{u}_x$ et $\vec{a} = \underline{A_m} e^{i\omega t} \vec{u}_x$. Le PFD projeté selon x en complexe donne :

$$\left(1 + \frac{\omega_0/Q}{j\omega} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \underline{A_m} = -\omega_0^2 X_0 \Rightarrow \underline{A_m} = \frac{X_0 \omega^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j\omega}{Q\omega_0}}$$

4) Sous ces conditions,

$$\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{\omega}{Q\omega_0} \ll 1 \Rightarrow \underline{A_m} \simeq X_0 \omega^2$$

5) L'énoncé affirme que :

$$\mathcal{P}_{\text{ray}} \propto A_m^2 \propto \omega^4$$

Ainsi, avec $\lambda_r = 750 \text{ nm}$ et $\lambda_b = 450 \text{ nm}$, on a :

$$\frac{\mathcal{P}_{\text{ray},b}}{\mathcal{P}_{\text{ray},r}} \simeq 8$$

Les électrons éclairés par le soleil émettent donc 8 fois plus de bleu que de rouge. Le ciel nous apparaît alors bleu.

Ex. n°8 • Détermination d'une ED



8255

1) On combine R et C en dérivation :

$$\underline{Z_{eq}} = \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)^{-1}$$

Avec un pont diviseur de tension :

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}} + 2R} \underline{e} = \frac{1}{1 + 2R\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)} \underline{e} = \frac{1}{3 + 2j\omega RC} \underline{e}$$

On en déduit :

$$(3 + 2j\omega RC) \underline{u} = \underline{e} \Rightarrow 2RC \frac{du}{dt} + 3u = e(t)$$

Sous forme canonique :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau} = \frac{e(t)}{2RC} \quad \text{avec :} \quad \tau = \frac{2RC}{3}$$

2) L'impédance équivalente est :

$$\underline{Z_{eq}} = R + j\omega L + \left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)^{-1} = R + j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \underline{e} &= \underline{Z_{eq}} \times \underline{i} = \left(R + j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega RC}\right) \underline{i} \\ \Rightarrow \left[(R + j\omega L)(1 + j\omega RC)\right] \underline{i} &= (1 + j\omega RC) \underline{e} \\ \Rightarrow \left(R + j\omega(L + R^2C) + (j\omega)^2 RLC\right) \underline{i} &= (1 + j\omega RC) \underline{e} \\ \Rightarrow Ri + (L + R^2C) \frac{di}{dt} + RLC \frac{d^2i}{dt^2} &= e(t) + RC \frac{de}{dt} \\ \Rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L}\right) \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} &= \frac{e}{LC} + \frac{1}{L} \frac{de}{dt} \end{aligned}$$

Sous forme canonique :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i(t) = \frac{e}{LC} + \frac{1}{L} \frac{de}{dt} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \omega_0 \left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L}\right)^{-1} \end{cases}$$

3) On combine les dipôles αR et L en série ; R et αL en dérivation :

$$\underline{Z}_1 = \alpha R + j\omega L \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\alpha\omega L} \right)^{-1}$$

On applique un pont diviseur de tension.

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{e} = \frac{1}{1 + (\alpha R + j\omega L) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\alpha\omega L} \right)} \underline{e} \\ &= \frac{j\omega L/R}{j\omega L/R + (\alpha + j\omega L/R)(j\omega L/R + 1/\alpha)} \underline{e} \\ &= \frac{j\omega L/R}{1 + \left(1 + \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \frac{j\omega L}{R} + \left(\frac{j\omega L}{R} \right)^2} \underline{e} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\left[1 + \left(1 + \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \frac{j\omega L}{R} + \left(\frac{j\omega L}{R} \right)^2 \right] \underline{u} = \frac{j\omega L}{R} \underline{e}$$

En notation réelle :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{R}{L} \left(1 + \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \frac{du}{dt} + \left(\frac{R}{L} \right)^2 u = \frac{R}{L} \frac{de}{dt}$$

Sous forme canonique :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u(t) = \omega_0 \frac{de}{dt} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} \omega_0 = \frac{R}{L} \\ Q = \left(1 + \alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^{-1} \end{cases}$$

Ex. n°9 • Impédance itérative



6472

1) L'énoncé demande l'une des expressions suivantes (j'effectue ici le calcul complet

jusqu'à obtenir la forme demandée) :

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \left(j\omega C + \left(j\omega L + \left(j\omega C + \frac{1}{\underline{Z}} \right)^{-1} \right)^{-1} \right)^{-1} \\ &= \left(j\omega C + \left(j\omega L + \frac{\underline{Z}}{1 + j\omega C \underline{Z}} \right)^{-1} \right)^{-1} \\ &= \left(j\omega C + \frac{1 + j\omega C \underline{Z}}{j\omega L + \underline{Z}(1 - \omega^2 CL)} \right)^{-1} \\ &= \frac{j\omega L + \underline{Z}(1 - \omega^2 CL)}{(1 - \omega^2 CL) + j\omega C \underline{Z}(1 - \omega^2 CL) + j\omega C \underline{Z}} \end{aligned}$$

On résout pour trouver $\underline{Z}$.

$$\Rightarrow j\omega C \underline{Z}^2 (1 - \omega^2 CL) + j\omega C \underline{Z}^2 = j\omega L$$

$$\Rightarrow \underline{Z}^2 = \frac{j\omega L}{j\omega C (2 - \omega^2 CL)}$$

$$\Rightarrow \underline{Z}^2 = \frac{L/C}{2 - \omega^2 CL}$$

2) Si $\omega < \sqrt{2/LC}$, alors $\underline{Z}^2 > 0$ donc, $\underline{Z}$ est une résistance R_{eq} tel que :

$$R_{eq} = \sqrt{\frac{L/C}{2 - \omega^2 CL}}$$

Si $\omega > \sqrt{2/LC}$, alors $\underline{Z}^2 < 0$ donc, $\underline{Z}$ est un imaginaire pur.

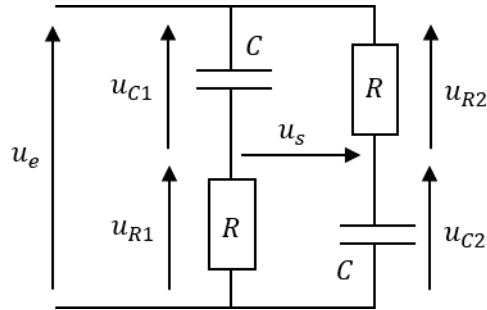
$$\underline{Z} = \pm j \sqrt{\frac{L/C}{\omega^2 CL - 2}}$$

Puisque le signe $\pm$ de l'impédance ne nous est pas imposé, il peut s'agir une bobine d'inductance L_{eq} ou d'un condensateur de capacité C_{eq} tel que :

$$j\omega L_{eq} = +j \sqrt{\frac{L/C}{\omega^2 CL - 2}} \Rightarrow L_{eq} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{L/C}{\omega^2 CL - 2}}$$

$$\frac{1}{j\omega C_{eq}} = -j \sqrt{\frac{L/C}{\omega^2 CL - 2}} \Rightarrow C_{eq} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\omega^2 CL - 2}{L/C}}$$

1) Commençons par redessiner le circuit et légèrer toutes les tensions.



On est en RSF. On a : $u_e(t) = U_e \cos(\omega t)$ et $u_s(t) = U_s \cos(\omega t + \phi)$. On cherche à déterminer U_s et ϕ . On passe en notation complexe. On pose : $\underline{u_e}(t) = U_e e^{j\omega t}$ et $\underline{u_s}(t) = \underline{U_s} e^{j\omega t}$ avec $\underline{U_s} = U_s e^{j\phi}$. On cherche ainsi à déterminer le complexe $\underline{U_s}$.

Pont diviseur de tension sur u_{R1} :

$$\underline{u_{R1}} = \frac{R}{R + 1/j\omega C} \underline{u_e} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} \underline{u_e}$$

Pont diviseur de tension sur u_{C2} :

$$\underline{u_{C2}} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} \underline{u_e} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \underline{u_e}$$

Par additivité des tensions :

$$\underline{u_s} = -\underline{u_{R1}} + \underline{u_{C2}} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC} \underline{u_e}$$

On divise par $e^{j\omega t}$ on obtient :

$$\underline{U_s} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC} U_e$$

Module :

$$U_s = |\underline{U_s}| = \frac{|1 - j\omega RC|}{|1 + j\omega RC|} U_e = U_e$$

Argument :

$$\phi = \arg(\underline{U_s}) = \arg(1 - j\omega RC) - \arg(1 + j\omega RC) + \underbrace{\arg(U_e)}_{=0} = 2 \arg(1 - j\omega RC)$$

Ainsi,

$$\phi = -2 \arctan(\omega RC)$$

On en déduit l'expression de $u_s(t)$:

$$u_s(t) = U_e \cos(\omega t - 2 \arctan(\omega RC))$$

2) Le réglage du produit RC permet ainsi de déphaser arbitrairement un signal entre 0 et $-\pi$ sans modifier son amplitude. On a réalisé un circuit déphaseur.

POUR S'ENTRAÎNER AU DS

1) La force de rappel du ressort vaut :

$$\vec{F}_{el} = k(\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_x = -k x(t) \vec{u}_x$$

Ainsi, le PFD appliqué à la masse dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen donne :

$$m\ddot{x} = K i(t) - \alpha \dot{x} - k x(t) \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x(t) = \frac{K}{m} i(t)$$

2) Sous forme canonique :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x(t) = \frac{K}{m} i(t) \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$$

3) L'excitation est sinusoïdale, donc la réponse en régime établi l'est elle aussi (RSF).

4) On passe en notation complexe :

$$\left(-\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega + \omega_0^2 \right) \underline{X_m} = \frac{K}{m} I_m \Rightarrow \underline{X_m} = \frac{K I_m / m}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega}$$

5) On a :

$$X_m(0) = \frac{K I_m}{m \omega_0^2} \quad \text{et} \quad X_m(\infty) = 0$$

6) Calculons le module de l'amplitude complexe.

$$X_m = |X_m| = \frac{KI_m/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}} = \frac{KI_m/m}{\sqrt{g(\omega)}}$$

X_m est maximale (résonance) lorsque $g(\omega)$ est minimale. Or,

$$\frac{dg}{d\omega} = -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\omega\frac{\omega_0^2}{Q^2} = 4\omega\left(\omega_2 - \omega_0^2 + \frac{\omega_0^2}{2Q^2}\right)$$

La dérivée s'annule pour $\omega = 0$ et pour :

$$\omega_{res} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

La résonance n'existe que si $Q > 1/\sqrt{2}$.

7) Lorsque $\omega = \omega_0$, $\phi = \pi/2$.

On en déduit donc (attention à l'échelle du graphe mal indiquée...) :

$$\omega_0 = 1200 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Ex. n°12 • Modélisation d'une antenne

★★★ 0669

1) On a trois dipôles en dérivation.

$$\underline{Z_{eq}} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right)^{-1} \Rightarrow \underline{Z_{eq}} = \frac{R}{1 + j\left(\omega RC - \frac{R}{\omega L}\right)}$$

On en déduit :

$$\boxed{Z_0 = R} \quad \text{et} \quad \frac{Q}{\omega_0} = \omega RC \quad \text{et} \quad Q\omega_0 = \frac{R}{\omega L}$$

En combinant les deux dernières relations, il vient :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

2) Ainsi, par définition :

$$\underline{u(t)} = \underline{Z_{eq}} \times \underline{i(t)} \Rightarrow \boxed{\underline{U_m} = \frac{RI_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

3) On en déduit :

$$U_m = \frac{RI_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

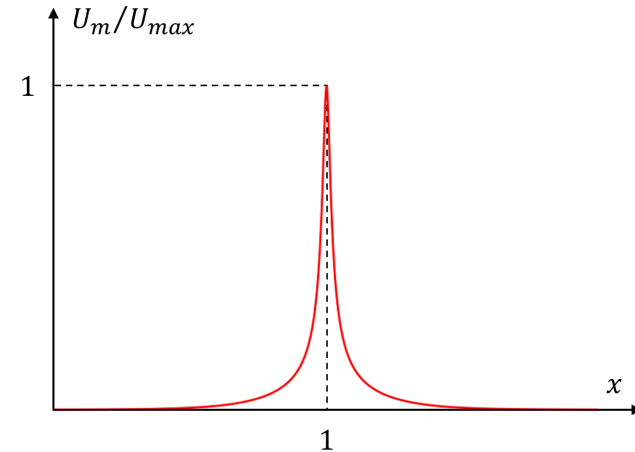
U_m est maximal quand son dénominateur est minimal, donc quand le second terme est nul :

$$\frac{\omega_{res}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{res}} = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_{res} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Pour cette valeur de pulsation :

$$\boxed{U_{max} = RI_0}$$

4)



5) Plus R est grand, plus la bande-passante est petite. En effet, si $R \rightarrow \infty$, alors le circuit tend vers un circuit LC , c'est-à-dire un oscillateur harmonique.

6) Par définition du déphasage ϕ entre u et i :

$$\underline{u(t)} = \underline{Z_{eq}} \times \underline{i(t)} \Rightarrow \arg(\underline{u}) = \arg(\underline{Z_{eq}}) + \arg(\underline{i}) \Rightarrow \phi = \arg(\underline{Z_{eq}})$$

Ainsi :

$$\phi = \arg(R) - \arg\left(1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = \arg\left(1 - jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

On en déduit le graphe :

